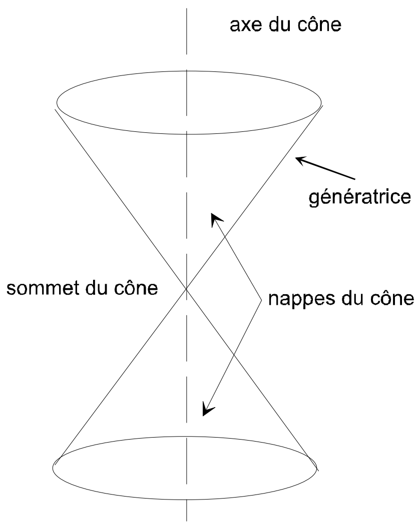
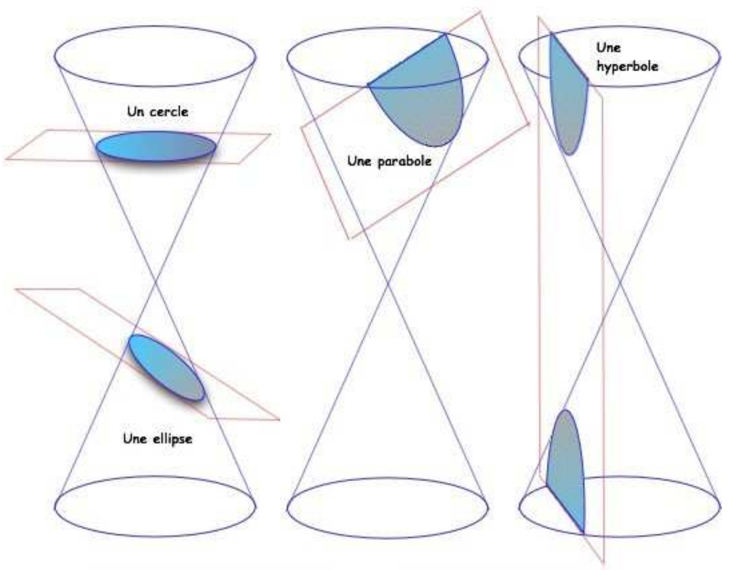
LES CONIQUES

Qu’est-ce qu’une conique ?

Une conique est une courbe plane que l’on peut tracer sur un cône de révolution à deux nappes. Suivant la position qu’il occupe par rapport à un cône, un plan qui coupe ce dernier déterminera une intersection qui sera :

- un ***cercle*** : le plan est perpendiculaire à l’axe ;
- une ***ellipse*** : le plan est incliné sur l’axe, mais il ne coupe qu’une seule des deux nappes ;
- une ***hyperbole*** : le plan est incliné ou parallèle à l’axe et coupe les deux nappes ;
- une ***parabole*** : le plan est parallèle à un plan tangent au cône.





Les définitions précédentes sont les définitions « historiques » des coniques. Elles avaient été données par les géomètres grecs.

Il existe cependant d’autres définitions, plus aisées à utiliser dans certains problèmes de mathématiques.

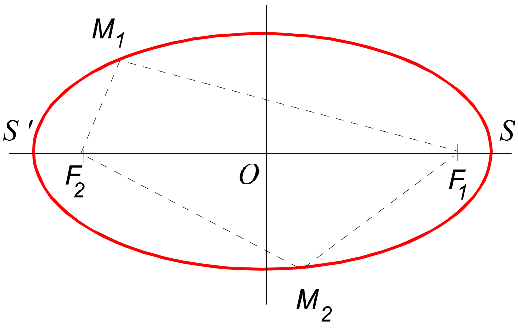
Remarque

Si le plan contient l’axe et coupe les deux nappes selon une génératrice, l’intersection sera un couple de droites. Si le plan coupe les deux nappes à leur point commun, l’intersection sera ce point. Ces deux cas limites font encore partie des coniques.

Définitions comme ensembles de points

Les définitions suivantes font intervenir un plan P et des points ou une droite contenus dans P.

Ellipse

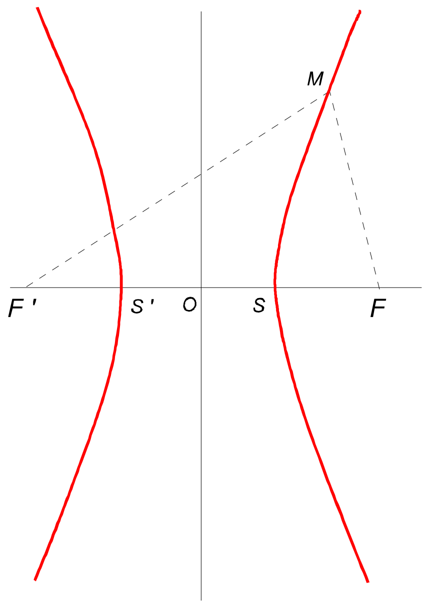


Étant donnés deux points fixes F_1 et F_2, on appelle ***ellipse*** l'ensemble des points du plan dont la somme des distances à F_1 et F_2 est constante.

$$M_1F_1 + M_1F_2 = M_2F_1 + M_2F_2 = \text{Constante} = 2a$$

F_1 et F_2 se nomment les ***foyers*** de l'ellipse,
S et S' sont ses ***sommets***, O est son ***centre***.

Hyperbole

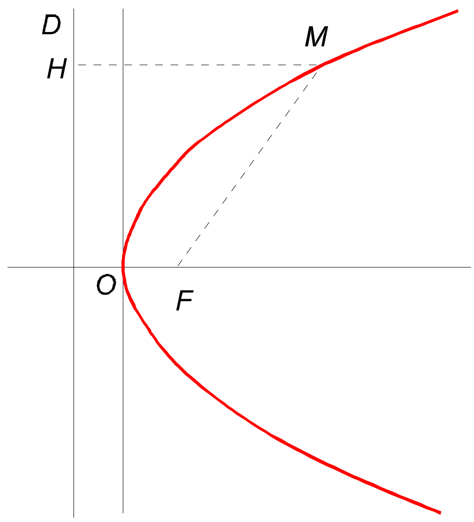


Étant donnés deux points fixes F et F', on appelle ***hyperbole*** l'ensemble des points du plan dont la différence des distances à F et F' est constante.

$$|MF - MF'| = \text{Constante} = 2a$$
$$SS' = 2a$$

F et F' se nomment les ***foyers*** de l'hyperbole,
a est son ***demi-grand axe***,
S et S' sont ses ***sommets,***
O est son ***centre***.

Parabole

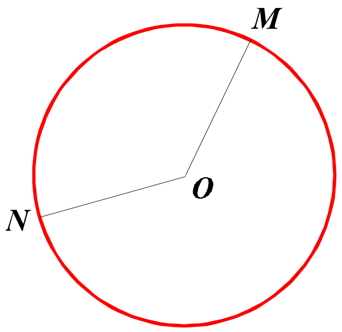


Étant donnés un point F et une droite D, on appelle ***parabole*** l'ensemble des points du plan dont les distances au point F et à D sont égales.

$$MF = MH$$

F se nomme le ***foyer*** de la parabole,
O est son ***sommet***,
D est sa ***directrice***,
H est la projection orthogonale de M sur D.

Cercle



Étant donné un point O contenu dans un plan, on appelle ***cercle*** l'ensemble des points du plan dont la distance à O est constante.

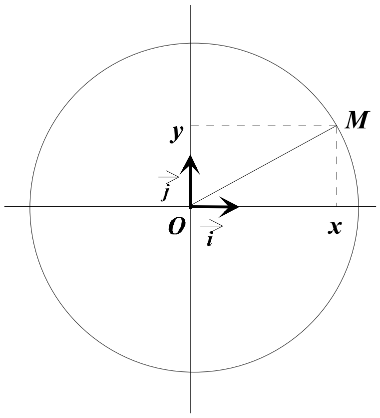
$MO = NO =$ Constante
la constante est le ***rayon*** du cercle,
O est son ***centre***.

Le cercle apparaît comme un cas particulier de l'ellipse : celui où les deux points F_1 et F_2 sont confondus.

Définitions analytiques

Si l'on rapporte le plan à un repère orthonormal bien choisi, les définitions précédentes peuvent être traduites par des équations cartésiennes. Ce sont ces définitions qui se prêtent le mieux à des calculs.

Cercle

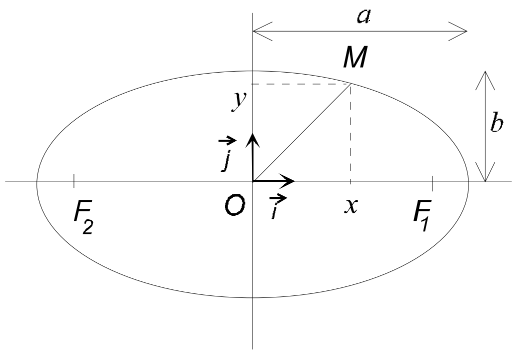


Étant donnée une distance R, un cercle est l'ensemble des points $M(x\ ;y)$ du plan vérifiant :

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$$

R est le rayon du cercle.

Ellipse

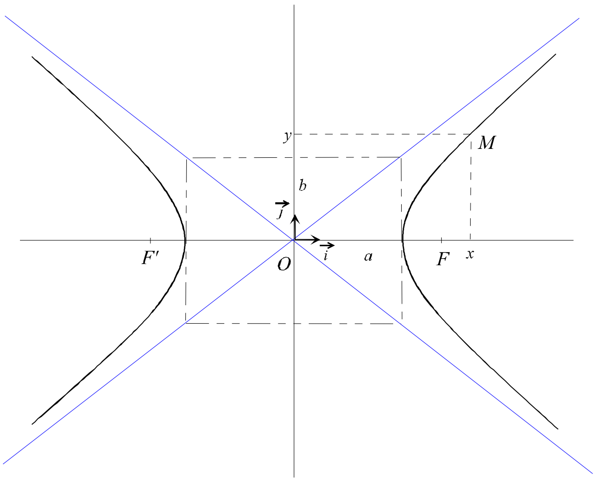


Étant donnés deux réels strictement positifs a et b, une ellipse est l'ensemble des points $M(x\ ;y)$ du plan vérifiant :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

a et b sont respectivement le ***demi-grand axe*** et le ***demi-petit axe*** de l'ellipse.

Hyperbole



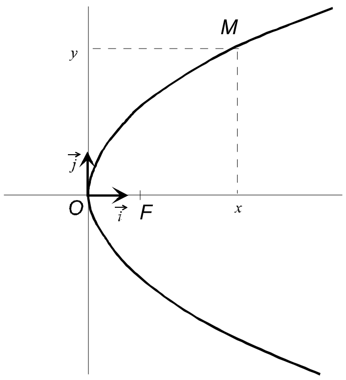
Étant donnés deux réels strictement positifs *a* et *b*, une hyperbole est l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan vérifiant :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

a porte le nom de ***demi-grand axe*** ;

sur le graphique ci-contre, les droites en bleu sont les ***asymptotes*** de l'hyperbole.

Parabole



Étant donné un réel strictement positif *p*, une parabole est l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan vérifiant :

$$\boxed{y^2 - 2px = 0}$$

F est le ***foyer***,

p porte le nom de ***paramètre*** de la parabole.

Remarque

L'équation à deux variables *x* et *y*, $ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$, est l'équation la plus générale du second degré ; c'est celle d'une conique.

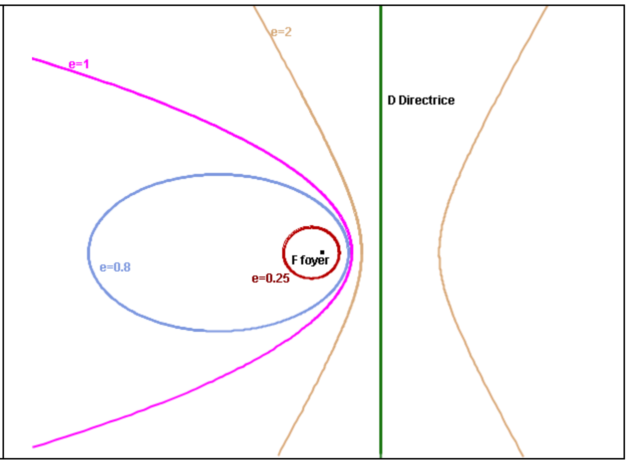
Excentricité et astronomie

Définition L'excentricité *e* d'une conique est définie par $e = \frac{c}{a}$, avec *c* défini par $c^2 = a^2 - b^2$ et $c > 0$.

Comètes et coniques

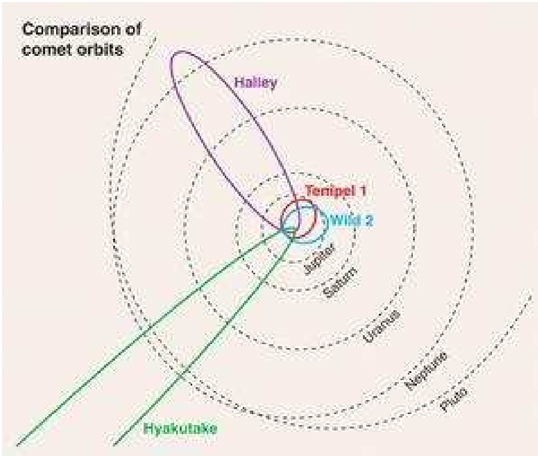
On démontre que :

- Si $e = 0$, la conique est un cercle,
- Si $e = 1$, la conique est une parabole,
- Si $0 < e < 1$, la conique est une ellipse,
- Si $e > 1$, la conique est une hyperbole.



L'excentricité d'une conique est un élément important en astronomie. Par exemple, pour toute nouvelle comète, on détermine une orbite approximative en prenant $e = 1$ (on fait l'hypothèse que cet astre circule sur une parabole). Puis, lorsque le nombre d'observations est suffisant, on détermine la vraie valeur de e. D'après ce qui précède on aura :

- Si $0 < e < 1$, la comète circule sur une orbite elliptique. Elle appartient (tout comme les planètes que nous voyons dans le ciel), au Système solaire et est périodique.
- Si $e > 1$, la comète circule sur une hyperbole. Il s'agit donc soit d'une comète venant de l'extérieur du Système solaire, soit d'une comète appartenant au Système solaire, mais déviée par une grosse planète (essentiellement Jupiter) auprès de laquelle elle est passée. Dans ce dernier cas, cette comète sortira du Système solaire.



Orbites de quatre comètes périodiques (vues en projection sur l'écliptique) : Halley, Hyakutake, Tempel1, et Wild2.

Parabole et miroirs de télescopes

Il est établi qu'un miroir parabolique permet d'éviter le défaut d'aberration chromatique rencontré avec les lunettes : avec un miroir parabolique, tous les rayons lumineux convergent vers le foyer du miroir, ce qui n'est pas le cas lorsqu'ils traversent une lentille.